

1. A Variável t de Student e sua f.d.p.

Não faz parte deste curso a demonstração de que a média amostral, definido como

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

requer, também, uma função densidade de probabilidade (f.d.p.) gaussiana se os valores x_i são independentes. Essa f.d.p. da média é dado por

$$f(\bar{x}) = \left(\frac{N}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{N(\bar{x} - x_0)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Essa f.d.p. indica que a média amostral está sujeita a flutuações e esse fato já ~~deve ter~~ foi observado na lista 1 (ou na prova 1, questão 4)

→ levar em aula essa questão! $\begin{cases} \bar{x} = 9,7 \\ \bar{x}_{10} = 10,4 \end{cases}$

Da mesma forma, o desvio padrão também está sujeito a flutuações e ele próprio possui sua f.d.p. (que nesse caso é mais complexo).

→ adivinha se $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ também tem uma f.d.p.?



Bom, o fato é que, desde que os dados sejam regidos por uma f.d.p. gaussiana é possível deduzir a f.d.p. da média, do desvio padrão e do desvio padrão da média!

Como as definições de $\bar{x}$ e σ são independentes, a f.d.p. conjunta de $\bar{x}$ e σ é o produto das f.d.p.s individuais. A partir das f.d.p.s destas estatísticas, podemos calcular a probabilidade α de certos intervalos contarem o valor verdadeiro

$$P(\bar{x} - t_{\alpha} \sigma_{\text{m}} \leq x_0 \leq \bar{x} + t_{\alpha} \sigma_{\text{m}}) = \alpha$$

No caso em que N é > 10 , o desvio padrão pode ser estimado com boa precisão e essa probabilidade é gaussiana (da média)

$$-t_{\alpha} \leq \underbrace{\frac{x_0 - \bar{x}}{\sigma_{\text{m}}}}_{t \text{ de Student}} \leq +t_{\alpha}$$

$$P(|t| \leq t_{\alpha}) = \alpha = \int_{-t_{\alpha}}^{+t_{\alpha}} f(t) \cdot dt$$

(note que essa f.d.p. depende de N !)

que deve ser calculado exatamente quando o n° de dados é pequeno.

Para $t_{\alpha} = 1$

$$P(\bar{x} - \sigma_{\text{m}} \leq x_0 \leq \bar{x} + \sigma_{\text{m}}) = \int_{-1}^{+1} f(t) \cdot dt$$



N	$P(\bar{x} - \sigma_{\text{m}} \leq x \leq \bar{x} + \sigma_{\text{m}})$
2	0.50
3	0.58
4	0.61
5	0.63
10	0.65
20	0.67
∞	0.683

A gente pode fazer a pergunta ao contrário

$$P(\bar{x} - T_1 \sigma_{\text{m}} \leq x_0 \leq \bar{x} + T_1 \sigma_{\text{m}}) = \int_{-T_1}^{T_1} f(t) dt = 0,683$$

e

$$P(\bar{x} - T_2 \sigma_{\text{m}} \leq x_0 \leq \bar{x} + T_2 \sigma_{\text{m}}) = \int_{-T_2}^{T_2} f(t) dt = 0,955$$

Os valores $T_1 \sigma_{\text{m}}$ chamamos de desvio padrão efetivo.

N	$t_1 (\alpha = 68,3\%)$	$t_2 (\alpha = 95,5\%)$
2	1,84	14,0
3	1,32	4,53
4	1,20	3,31
5	1,14	2,87
10	1,06	2,32
20	1,03	2,14
∞	1,00	2,00



2. O Teste t

Vamos reavitar a questão do teste de hipótese quando comparamos um valor experimental com o valor convencional (ou valor esperado).

Digamos que $\bar{x}$ e σ_m são valores obtidos experimentalmente e x_0 o valor convencional dessa grandeza. A partir do f.d.p. de t , podemos montar um teste de hipótese

$$t = \frac{\bar{x} - x_0}{\sigma_m}$$

Podemos definir níveis de significância, como por exemplo, o de 5%.

$$\begin{aligned} P(-t_{\text{crítico}} \leq t \leq +t_{\text{crítico}}) &= 0,05 \\ &= \int_{-t_{\text{crítico}}}^{+t_{\text{crítico}}} f_v(t) dt \end{aligned}$$

$v = N - 1$ (vínculo de 1)
↳ graus de liberdade



ν	$\alpha = 0,05$	0,01	0,001
1	12,7	63,7	636
2	4,30	6,97	31,6
3	3,18	5,84	12,69
4	2,78	4,60	8,61
5	2,57	4,03	6,87
10	2,23	3,17	4,59
20	2,09	2,85	3,85
30	2,04	2,75	3,65
∞	1,96	2,58	3,29

2.1. Aplicação do Teste t

Em uma medida da intensidade de muons por segundo foram obtidos os seguintes valores.

$$\bar{x} = 9,30 \quad e \quad \sigma_m = 0,54$$

(5 ~~ma~~ valores exp.)

Uma teoria prevê que a intensidade deitado é igual a 10,5 muons/segundo.

Os dados suportam essa teoria??

$$\text{Hipótese: } x_0 = 10,50$$

$$t = \frac{\bar{x} - x_0}{\sigma_m} = \frac{9,30 - 10,50}{0,54} = -2,2$$

$$\nu = N - 1 = 5 - 1 = 4$$



At nível de significância de 5%, $t_{crit} = 2,78$.

Como $|t| \leq t_{crit}$, a hipótese é válida! ECO

Exercício

1. Em um laboratório didático 6 grupos de estudantes mediram a aceleração da gravidade local obtendo os resultados

8,5; 8,0; 9,2; 8,7; 8,8; 10,3 (em m/s^2)

Supondo que esses resultados obedecem a f.d.p. gaussiana, use o teste t para verificar se esses dados são compatíveis com o valor $g = 9,807 \text{ m/s}^2$ dentro de níveis de significância de 5%, 1% e 0,1%.

$$\bar{g} = 8,92 \text{ m/s}^2 \quad e \quad s = 0,52 \quad e \quad s_m = 0,21 \text{ m/s}^2$$

hipótese. $g_0 = 9,807 \text{ m/s}^2$

$$v = 6 - 1 = 5$$

$$|t| = \frac{|8,92 - 9,807|}{0,21} = 4,2$$

Para $v = 5$, ao nível de significância de 5%.

$$t_{\text{crit}} = 2,57$$

$$|t| > t_{\text{crit}} \Rightarrow \text{hipótese rejeitada!}$$

Ao nível de significância de 1%, $t_{\text{crit}} = 4,03$

$$|t| > t_{\text{crit}} \Rightarrow \text{hipótese rejeitada}$$

Ao nível de significância de 0,1%, $t_{\text{crit}} = 6,87$

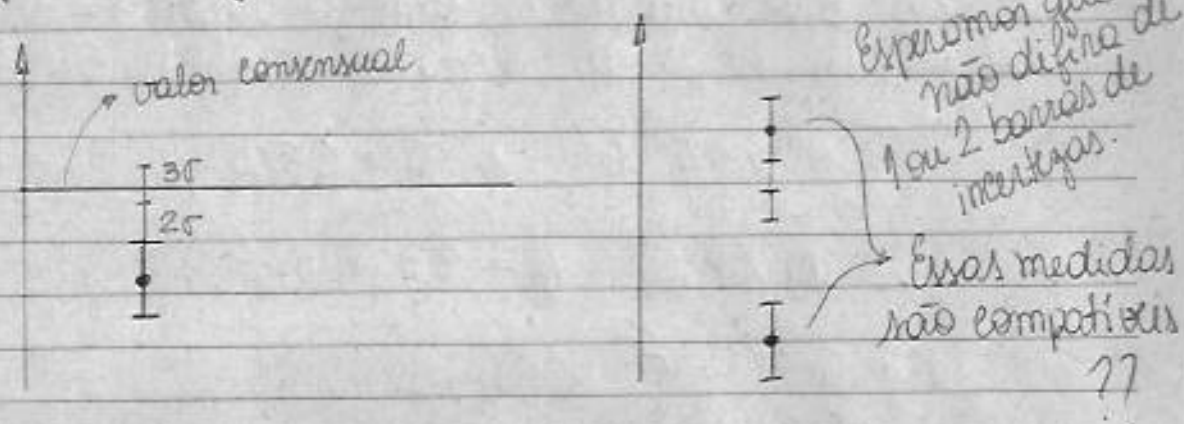
$$|t| < t_{\text{crit}} \Rightarrow \text{hipótese aceita!}$$



3. Comparação de 2 médias

A comparação de um valor experimental, contendo um valor σ_m , com um valor consensual, no qual acredita-se ser o valor da grandeza, foi explorado na seção anterior.

Agora deseja-se comparar 2 valores experimentais



Suponhamos que 2 grupos de alunos meçam a capacitância de um capacitor.

1º grupo: n medidas, obtive $\bar{X}_1$ e σ_1

2º grupo: m medidas, obtive $\bar{X}_2$ e σ_2

Como os 2 grupos mediram o mesmo capacitor, os resultados obtidos devem ser o mesmo, embora os valores de $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ certamente sejam diferentes devido à flutuação estatística.

$$\text{Hipótese: } \bar{X}_1 = \bar{X}_2$$



ou de forma equivalente

$$\text{Hipótese equiv.} \rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 0$$

Para simplificar, assumiremos que $\sigma_1 = \sigma_2$

A estimativa da variância de $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ é

$$\begin{aligned}\text{var}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= \text{var}(\bar{X}_1) + \text{var}(\bar{X}_2) \\ &= \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)\end{aligned}$$

Nossa melhor estimativa para a variância global (σ^2) é

$$\theta^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^m (x_j - \bar{X}_2)^2}{(n-1) + (m-1)}$$

$$\theta^2 = \frac{(n-1)\sigma_1^2 + (m-1)\sigma_2^2}{n+m-2} \cong \sigma^2$$

A variável estatística t fica

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\theta \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\theta} \sqrt{\frac{n \cdot m}{n+m}}$$

que possui uma f.d.p. de t de Student com $n+m-2$ graus de liberdade



Procedimento para comparar 2 medidas.

1. determine θ a partir de σ_1, n e σ_2, m
2. determine t , lembrando
3. lembrando que o grau de liberdade é $n + m - 2$, compare t com o valor de t_{critico} .

4. Comparação de 2 estimativas para σ^2

Problema a ser atacado: Um fabricante específico para seus multímetros digitais que a precisão na medida de resistências na faixa de $32\text{k}\Omega$ é igual a 10% do valor medido.

Uma oficina eletrônica compra 5 desses multímetros e medindo uma resistência padrão de $25,000(5)\text{k}\Omega$ obtém

$$\bar{r} = 25,10 \quad \text{e} \quad \sigma = 0,116$$

(precisão de 0,5%)

O laboratório didático compra 10 desses multímetros, mediu a mesma resistência padrão e obtém

$$\bar{r}' = 24,98 \quad \text{e} \quad \sigma' = 0,273$$

(precisão de 1,1%)

ECO

Os desvios padrões são os mesmos??

No caso em que as medidas são independentes é possível determinar a f.d.p. da razão

$$\frac{\sigma^2}{\sigma'^2}$$

a partir das f.d.p.'s individuais (não será demonstrado)

A f.d.p. de interesse é a do parâmetro F de Fisher definido como:

$$F = \frac{\sigma'^2}{\sigma_0^2} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$$

onde σ_0 é o valor verdadeiro de σ e

σ' o valor verdadeiro de σ' .

No exemplo acima, a hipótese a ser testado é

Hipótese: $\sigma_0 = \sigma'$ || (não importa o valor)

Assim o parâmetro $F = \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}$

Nota. A f.d.p. de F de Fisher depende dos graus de liberdade dos 2 parâmetros.



Nota 2: no numerador, o σ com maior grau de liberdade.

$$\Rightarrow \text{No caso de exemplo, } F = \frac{0,273^2}{0,116^2} = 5,94$$

Baseamos o teste numa f.d.p., sendo o nível de significância dado por α

$$\alpha = \int_{F_{\text{crit}}}^{\infty} f(F) dF$$

Neste exemplo, $F_{\text{critico}} = 6,00$

$$|F| \leq F_{\text{critico}} \Rightarrow \text{hipótese válida } (\sigma_0 = \sigma_1)$$

